

Решение уравнения полюсов в задаче распространения электромагнитных волн над земной поверхностью

А. В. Минаков, В. С. Панько, Ю. П. Саломатов¹

Сибирский федеральный университет

¹ysalomatov@sfu-kras.ru

Аннотация. Получены дополнительные к известным решениям уравнения полюсов в задаче распространения электромагнитных волн над земной поверхностью. Приведено выражение в виде степенного ряда, позволяющее находить более точные решения уравнения полюсов в предельных случаях, а также интегрировать дифференциальное уравнение, соответствующее уравнению полюсов методом переразложения рядов. Приведены численные результаты для конкретных примеров.

Ключевые слова: электромагнитные волны; дифракция; сферическая поверхность Земли; функция ослабления; граничные условия; численные методы

I. ВВЕДЕНИЕ

Задача дифракции электромагнитной волны вокруг гладкой сферической поверхности Земли решена в работах В. А. Фока, Е. Л. Фейнберга [1, 2]. Для определения поля вертикального излучателя в случае, когда излучатель и наблюдатель находятся на поверхности Земли, решение сводится к вычислению функции ослабления [2, 3]:

$$V(x, q) = \sqrt{i\pi x} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\exp(ixt_s)}{t_s - q^2}, \quad (1)$$

где $x = \sqrt{\frac{k}{2a^2}} \theta a$, $q = \frac{i}{\sqrt{\epsilon^0}} \sqrt{\frac{ka}{2}}$, a – радиус Земли, θ – угловое расстояние на поверхности Земли между излучателем и точкой наблюдения, k – волновое число, ϵ^0 является функцией электрофизических параметров подстилающей поверхности (диэлектрической проницаемости и проводимости). Модуль функции ослабления дает дополнительное (к сферической волне в свободном пространстве) ослабление амплитуды электромагнитного поля за счет дифракции вдоль поверхности земли, а ее фаза – дополнительное запаздывание относительно фазы той же сферической волны.

Параметры t_s , входящие в выражение для функции ослабления (1), являются корнями уравнения мод земной волны [3, 4, 5]:

$$W'(t_s) - qW(t_s) = 0, \quad (2)$$

где $W(t)$ – функция Эйри комплексного переменного [6, 7].

В работе [4] уравнение (2), вытекающее из приближенных граничных условий на поверхности

Земли [8], получило название уравнения полюсов в задаче распространения радиоволн вдоль земной поверхности.

Как известно, уравнение полюсов (2) достаточно просто решается для двух случаев: $q = 0$ (длинные волны, морская поверхность) и $q \rightarrow \infty$ (короткие волны, сухая почва) [2, 3, 4]. В первом случае значения t_s совпадают с корнями производной функции Эйри, а во втором – с корнями самой функции Эйри.

II. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПОЛЮСОВ ПСЕВДОДАЛЬНОСТЕЙ

Между тем, могут быть найдены и другие решения уравнения полюсов, лежащие на комплексной плоскости на луче $t_s = te^{i\pi/3}$ (t – действительное число).

Запишем уравнение полюсов (2) в следующем виде:

$$q = \frac{W'(te^{i\pi/3})}{W(te^{i\pi/3})}. \quad (3)$$

Используя соотношения «обхода» для функции Эйри комплексного аргумента [4, 6]:

$$\begin{aligned} W(te^{i\pi/3}) &= 2\sqrt{\pi}e^{i\pi/6}Ai(-t), \\ W'(te^{i\pi/3}) &= -2\sqrt{\pi}e^{-i\pi/6}A'i(-t), \end{aligned} \quad (4)$$

где $Ai(t)$ – функция Эйри действительного аргумента (t) [6], получим:

$$q_0 = e^{i\frac{2\pi}{3}} \frac{A'i(-t)}{Ai(-t)} \quad (5)$$

Здесь индекс «0» обозначает решения, лежащие именно на луче $t_s = te^{i\frac{\pi}{3}}$. Таким образом, при $\frac{A'i(-t)}{Ai(-t)} > 0$ получаем при заданном $|q|$ множество корней уравнения полюсов (рис. 1) в интервалах $t_s^\infty \leq t \leq t_s^0$, при этом $0 \leq |q| \leq \infty$, а $\arg(q) = \frac{2\pi}{3}$. Известные решения t_s^∞ и t_s^0 являются частными случаями полученных решений для $q = 0$ и $|q| \rightarrow \infty$.

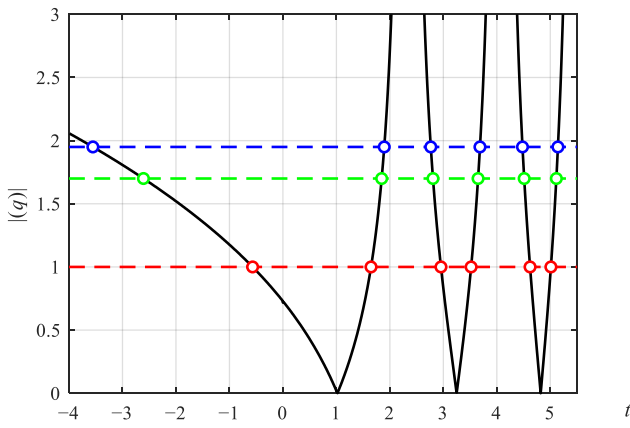


Рис. 1. Решения уравнения полюсов для “емкостной” трассы при $|q| = \text{const}$, $\arg(q) = 2\pi/3$

Параметр q (3) для случая слоистого по глубине строения земли связан с так называемым приведенным поверхностным импедансом (δ) [3, 5]. Введение понятия приведенного поверхностного импеданса позволяет при рассмотрении вопросов распространения электромагнитных волн вдоль поверхности земли заменять многослойную среду некоторой эквивалентной однослойной.

Для однослойной земли аргумент поверхностного импеданса всегда отрицателен. В настоящей работе принята зависимость от времени вида $e^{-i\omega t}$, поверхностный импеданс имеет индуктивный характер. Для двухслойной земли, наиболее часто встречающейся на практике, импеданс в зависимости от соотношения параметров слоев (толщин и электрофизических) может быть, как индуктивным, так и емкостным.

Аргумент приведенного поверхностного импеданса δ равен [2]:

$$\arg(\delta) = \arg(q) - \frac{\pi}{2}.$$

Из приведенного выражения следует, что полученные решения уравнения полюсов соответствуют емкостному импедансу подстилающей поверхности, который возникает, например, при тонком, хорошо проводящем слое, находящемся над плохо проводящим слоем [3].

При $\frac{A'i(-t)}{Ai(-t)} < 0$ также получим множество корней (при заданном $|q|$) в интервалах $t_s^0 < t < t_{s+1}^\infty$. Этим корням соответствует значение $\arg(q) = -\pi/3$. Для физически осуществимых подстилающих поверхностей значение аргумента q лежит в пределах $0 \leq \arg(q) \leq \pi$ [3], поэтому данные корни могут быть отброшены.

Для определения решений уравнения полюсов при произвольных значениях q обычно переходят к дифференциальному уравнению для значений t_s как функции параметра q . Данное уравнение имеет вид:

$$\frac{dt_s}{dq} = \frac{1}{(t_s - q^2)}. \quad (6)$$

В качестве начальных условий при интегрировании этого уравнения берутся значения $t_s(0) = t_s^0$. При помощи замены переменной $u = 1/q$ можно получить аналогичное уравнение, при интегрировании которого используются начальные условия $t_s(\infty) = t_s^\infty$. Для этих двух случаев $t_s(0) = t_s^0$ и $t_s(\infty) = t_s^\infty$ в [3] приводятся разложения $t_s(q)$ в ряды Тейлора по степеням q и $1/q$, которые сходятся при $|q| < \sqrt{t_s}$ и $|q| > \sqrt{t_s}$ соответственно. При $|q| \approx t_s$ рекомендуется численно решать дифференциальное уравнение, находя t_s .

Между тем, используя полученные выше решения уравнения полюсов (5), можно записать ряд Тейлора для определения $t_s(q)$ в окрестности произвольной точки $q = q_0$ и соответствующего ей значения $t_s^{q_0}$ из (5):

$$t_s(q) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(s)} (q - q_0)^n, \quad (7)$$

$$C_0^{(s)} = t_s^{q_0}, \quad C_1^{(s)} = \frac{1}{t_s^{q_0} - q_0^2},$$

$$C_n^{(s)} = \frac{C_1^{(s)}}{n} \left[2(n-1)q_0 C_{n-1}^{(s)} + (n-2)C_{n-2}^{(s)} - \frac{n}{2} \sum_{m=1}^{n-1} C_m^{(s)} C_{n-m}^{(s)} \right],$$

q_0 и $t_s^{q_0}$ связаны соотношением (5). Полученный ряд (7) при $q_0 = 0$ переходит в известный, приведенный в [3], но может, в отличие от него, использоваться в ряде случаев для нахождения значений t_s при $|q|/\sqrt{t_s} \approx 1$. В таблице ниже приведены значения t_s для $\arg(q) = \pi/4$, найденные при помощи численного интегрирования дифференциального уравнения (t_{s_0}) , при помощи полученного ряда (t_{s_1}) , а также при помощи известных рядов (t_{s_2}) в окрестности $|q| = 0$ (в обоих случаях при расчетах использовано 6 членов ряда).

$ q $	t_{s_0}	t_{s_1}	t_{s_2}
1.75	1.510+i1.460	1.561+i1.476	1.392+i1.527
1.85	1.507+i1.503	1.570+i1.532	1.927+i1.836

Из таблицы видно, что значения t_{s_1} ближе к точным значениям t_{s_0} (ошибка во втором–третьем знаках после запятой), чем t_{s_2} (ошибка в первом знаке после запятой).

Ряд (7) для $t_s(q)$ в окрестности $q = q_0$ может быть использован также для численного интегрирования дифференциального уравнения (6) способом переразложения, при этом в качестве начальной точки может выбираться любое из найденных выше решений уравнения полюсов. Это позволяет использовать данный ряд для нахождения решений уравнения полюсов также и в окрестностях так называемых «вырожденных» точек.

Решения дифференциального уравнения для $t_s(q)$ при начальных условиях, полученных в данной работе, всегда будут иметь вид замкнутых кривых, в «центре»

которых в зависимости от $|q|$ будут находиться либо корни t_s^0 , либо t_s^∞ , либо несколько таких корней.

На рис. 2 показаны линии нулей уравнения полюсов, полученные при помощи численного решения дифференциального уравнения (6) ($|q| = \text{const}$, $\arg(q) = \text{var}$).

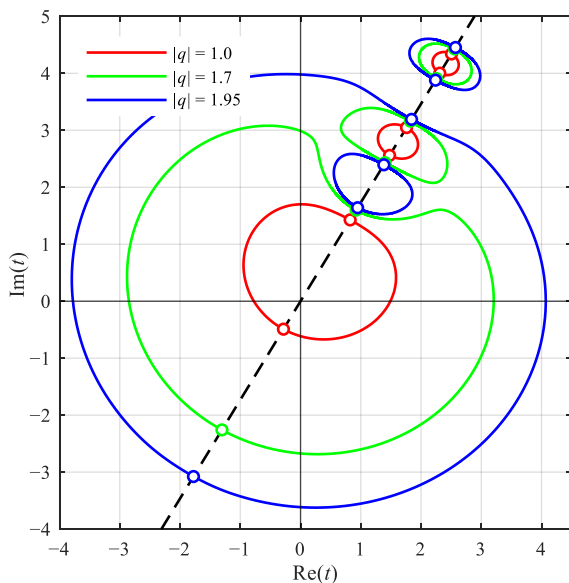


Рис. 2. Линии нулей уравнения полюсов при различных значениях $|q|$

Начальные условия для нахождения решений определены из выражения (5) при различных $|q|$. Прямая пунктирная линия на рис. 2 соответствует «емкостной» трассе ($\arg(q) = 2\pi/3$), а точки пересечения этой прямой с замкнутыми кривыми соответствуют решениям, полученным из (5), т. е. точкам пересечения кривых на рис. 1 с прямыми $|q| = \text{const}$.

Как отмечалось выше, только часть каждой из этих замкнутых кривых будут соответствовать физически реализуемым однослойной и двухслойной поверхностям Земли.

III. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной работе получены дополнительные к известным решениям уравнения полюсов для емкостной трассы в задаче распространения электромагнитной волны вокруг земной поверхности. Также получено выражение для корней уравнения полюсов в виде степенного ряда, позволяющее находить более точные решения уравнения полюсов в предельных случаях, а также интегрировать дифференциальное уравнение, соответствующее уравнению полюсов методом перерасложения рядов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Фок В.А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М.: Советское радио, 2011. 520 с.
- [2] Фейнберг Е.Л. Распространение радиоволн вдоль земной поверхности. М.: Наука. Физматлит, 1999. 496 с.
- [3] Распространение электромагнитных волн над земной поверхностью / Г.И. Макаров, В.В. Новиков, С.Т. Рыбачек. М.: Наука, 1991. 196 с.
- [4] Wait J.R. Electromagnetic Waves in Stratified Media. Oxford: Pergamon. 1962, (2nd ed., 1970).
- [5] Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. Пер. с англ. М., Наука, 1979.
- [6] Федорюк М.В. Асимптотика: Интегралы и ряды. М., Наука, 1987.
- [7] Калинин Ю.К. Некоторые вопросы распространения радиоволн над неоднородной сферической поверхностью земли // Труды ИЗМИРАН, вып. 17, 1960.
- [8] D. Hill, J. Wait. HF ground wave propagation over sea ice for a spherical Earth model // IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 29, no. 3, pp. 525-527, May 1981, doi: 10.1109/TAP.1981.1142594
- [9] Wait J.R. The ancient and modern history of EM ground-wave propagation // IEEE Antennas and Propagation Magazine, vol. 40, no. 5, pp. 7-24, Oct. 1998, doi: 10.1109/74.735961