

Математическая модель, алгоритм и компьютерный код для анализа тонких диэлектрических пластин рассеивателей на основе поверхностного эквивалентного уравнения и метода моментов

Т. Ф. Данг, А. Ф. Алхадж Хасан, Т. Р. Газизов

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

dang.p.2213-2023@e.tusur.ru, alkhadz@tusur.ru, talgat.r.gazizov@tusur.ru

Аннотация. Электромагнитный анализ диэлектрических структур представляет интерес для многих исследователей в связи с широким применением новых диэлектрических и композитных материалов. Поэтому в данной работе проведен подробный анализ структуры из тонкой диэлектрической пластины методом моментов со ступенчатыми базисными функциями на основе теории эквивалентности поверхности с приближенным вычислением интеграла. Разработана математическая модель, основанная на данном подходе, алгоритм и компьютерный код на его основе для моделирования структуры из тонкой диэлектрической пластины, возбуждаемой ТМ плоской волной. Полученные результаты сравнены с ранее опубликованными, рассчитанными методом моментов со ступенчатыми базисными функциями на основе теории эквивалентности поверхности с прямым вычислением интеграла. Хорошее согласование результатов показало эффективность математической модели и основанного на ней кода.

Ключевые слова: *рассеиватель, эффективная площадь рассеяния, тонкая диэлектрическая пластина, теория эквивалентности поверхности, метод моментов*

I. ВВЕДЕНИЕ

Создание новых рассеивающих структур представляет интерес уже давно. Проблема электромагнитного рассеяния связана с взаимодействием электромагнитных волн с объектом в определенной среде. Когда падающая волна возбуждает объект, в нем возникает ток, который создает поле рассеяния. Оно может быть полезным [1] или вредным [2] в зависимости от условий. Анализ поля рассеяния всегда является сложной задачей, поскольку он зависит от параметров падающей волны, характеристик рассеивающего объекта и окружающей среды. Одним из наиболее интересных являются рассеивающие объекты из диэлектрических материалов. Они находят применение во многих областях, таких как проектирование широкополосных широкоугольных рассеивающих поверхностей [3] и измерение электрических полей [4]. Поэтому анализ характеристик рассеяния диэлектрических материалов является важной темой, которая продолжает привлекать внимание многих ученых [5].

С ростом использования диэлектрических материалов в искусственных устройствах, проблема

моделирования тонкого диэлектрического слоя таким образом, чтобы можно было точно и эффективно рассчитать поле рассеяния, также представляет особый интерес. Хорошо известно, что помимо аналитических решений [6], есть много различных численных методов анализа диэлектрических структур, таких как метод конечных разностей во временной области (МКРВО) [7], метод конечных элементов [8] и др. Аналитические решения могут быть применены только к относительно простым геометриям, например, однородным диэлектрическим цилиндрам с круглым или эллиптическим поперечным сечением, но для цилиндров других форм доступны только приближенные аналитические решения. Поэтому для решения сложных задач используются численные методы [9].

Однако численные методы могут давать разные результаты для одной и той же задачи, поэтому, согласно IEEE Std 1597.2-2010, любые численные решения должны быть верифицированы сравнением с экспериментальными результатами или проверенными компьютерными кодами, использующими тот же или другой численный метод [10]. МКРВО является мощным методом и применяется для решения многих задач, включающих диэлектрические материалы. Однако он не очень приспособлен для решения задач с криволинейными структурами, такими как тонкие винтовые или спиральные [11]. Между тем метод моментов (МоМ) также является одним из популярных численных методов, который используется для решения задач электромагнитного рассеяния [12]. Суть его заключается в преобразовании интегрального уравнения поля в систему линейных уравнений и решении этой системы путем решения матричного уравнения с неизвестным вектором (распределения тока), который необходимо определить. Его получают с помощью компьютерных программ с достаточно высокой скоростью и меньшим объемом памяти.

Для анализа неоднородных диэлектрических структур различной формы можно использовать МоМ и объемные интегральные уравнения (ОИУ) [13]. Однако при использовании этого подхода узлы сетки располагаются внутри объема объекта, поэтому необходимо решать систему уравнений со многими неизвестными (много узлов требуется для аппроксимации структуры), что требует больших вычислительных затрат. Другим подходом к анализу

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России по проекту FEWM-2024-0005.

тонких диэлектрических структур является использование МоМ с теоремой эквивалентности поверхности (ТЭП) для решения уравнения эквивалентности поверхности [14]. При таком подходе узлы сетки располагаются на поверхности структуры (следовательно, для аппроксимации структуры требуется меньше узлов), что дает ТЭП преимущество перед ОИУ. Это значительно ускоряет вычисления и экономит память. Однако ТЭП можно использовать только с однородным диэлектриком [10].

В классической работе [15] приведены формулы для анализа тонкой диэлектрической пластины с помощью МоМ. Однако в этом анализе для вычисления элементов матрицы МоМ Z , получаемых после применения ТЭП и МоМ со ступенчатыми базисными функциями (СБФ), используется непосредственно ИУЭП, что усложняет программную реализацию данного подхода. Однако приближенное вычисление интегралов в данном анализе позволяет преодолеть эту проблему и повысить эффективность использования такого подхода для анализа тонких диэлектрических пластин.

Целью данной работы является разработка математической модели, использующей ТЭП и МоМ с СБФ и приближенным интегральным решением, а также алгоритма и компьютерного кода на его основе для моделирования тонкой бесконечной диэлектрической пластины. Результаты, полученные в данной работе с помощью разработанного кода MATLAB, сравнивались с полученными с помощью ТЭП и МоМ с СБФ и прямым интегральным решением в [15].

Данная работа организована следующим образом: В разделе II дается подробное изложение разработанной математической модели для анализа тонкой диэлектрической пластины, возбуждаемой падающими плоскими волнами. Кроме того, предложены простые формулы, использующие аппроксимацию функции Ганкеля с малым и большим аргументами. В разделе III представлен алгоритм работы математической модели в виде последовательности шагов, позволяющих разработать на ее основе программу для расчета рассеянного поля, создаваемого распределением тока на поверхности пластины. В разделе IV результаты моделирования тонкой диэлектрической пластины с помощью разработанного кода MATLAB сравниваются с другими опубликованными результатами. В разделе V подводятся итоги исследования и делаются выводы.

II. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Чтобы пояснить общие формулы для анализа диэлектриков с помощью МоМ с ТЭП из [15], рассмотрим пример тонкой диэлектрической пластины с одним краем длиной l вдоль оси Ox и другим бесконечно длинным краем вдоль оси Oz (рис. 1). Пластина расположена ортогонально оси Oy . Тогда задача становится двумерной задачей рассеяния. Используемая возбуждающая падающая волна является ТМ-волной с вектором E , параллельным оси Oz и направленным под углом φ^{inc} , тогда рассеянная волна направлена под углом φ^{scat} .

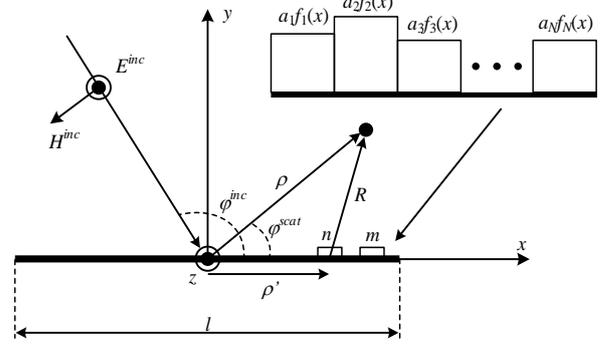


Рис. 1. Геометрия двумерной тонкой диэлектрической пластины бесконечной длины

Из [16] ИУЭП для плотности тока J_s , создаваемого на поверхности S пластины, возбуждаемой падающей волной E^{inc} , может быть определено следующим образом:

$$A = \mu \iint_S J_s \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dS, \quad (1)$$

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon} \iint_S \frac{-1}{j\omega} \nabla_s J_s \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dS, \quad (2)$$

где A – вектор магнитного потенциала, Φ – электрический скалярный потенциал, μ и ε – абсолютные магнитная и диэлектрическая проницаемости среды, ω – угловая частота, вычисляемая по частоте f от E^{inc} , k – волновое число, определяемое через $k = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon}$, где ε_0 и μ_0 – магнитная и диэлектрическая проницаемости вакуума. R – расстояние от точки источника (рассматриваемого сегмента или узла сетки) до точки расчета поля.

При использовании МоМ с СБФ для определения тока, возникающего на поверхности пластины, эта поверхность делится на сегменты вдоль оси Ox . Они имеют одинаковую длину Δ . Из рис. 1, R можно получить как:

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} = \sqrt{|\rho - \rho'|^2 + (z-z')^2}, \quad (3)$$

где x, y, z – координаты точки расчета поля, x', y', z' – координаты точки середины рассматриваемого сегмента, ρ – расстояние от начала системы координат до точки расчета поля, ρ' – расстояние от начала системы координат до точки середины рассматриваемого сегмента. Для двумерной задачи (1) и (2) могут быть переписаны в виде:

$$A = \frac{\mu}{4} \int_l J_s \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jk\sqrt{|\rho - \rho'|^2 + (z-z')^2}}}{\pi\sqrt{|\rho - \rho'|^2 + (z-z')^2}} dz' \right] dx', \quad (4)$$

$$\Phi = \frac{1}{4\varepsilon} \int_l \frac{j}{\omega} \nabla J_s \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jk\sqrt{|\rho - \rho'|^2 + (z-z')^2}}}{\pi\sqrt{|\rho - \rho'|^2 + (z-z')^2}} dz' \right] dx'. \quad (5)$$

Поскольку интеграл с бесконечными пределами может быть представлен функцией Ханкеля второго рода нулевого порядка $H_0^{(2)}$ в виде [17]:

$$\frac{H_0^{(2)}(k|\rho - \rho'|)}{j} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jk\sqrt{|\rho - \rho'|^2 + (z-z')^2}}}{\pi\sqrt{|\rho - \rho'|^2 + (z-z')^2}} dz', \quad (6)$$

тогда (4) и (5) становятся:

$$A = \frac{\mu}{4j} \int_l J_s H_0^{(2)}(k|\rho - \rho'|) dx', \quad (7)$$

$$\Phi = \frac{1}{4\epsilon\omega} \int_l \nabla J_s H_0^{(2)}(k|\rho - \rho'|) dx'. \quad (8)$$

Рассеянное поле E^{scat} , создаваемое J_s , может быть выражено в виде интегрального потенциала как

$$\begin{aligned} E^s &= -j\omega A - \nabla\Phi \\ &= -j\omega \left(1 + \frac{\nabla\nabla}{\epsilon\omega^2\mu}\right) \frac{\mu}{4j} \int_l J_s H_0^{(2)}(k|\rho - \rho'|) dx' \\ &= -j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} (\omega^2\mu\epsilon + \nabla\nabla) A. \end{aligned} \quad (9)$$

Поскольку в рассматриваемом примере падающее электрическое поле имеет составляющую только вдоль оси Oz, плотность поверхностного тока будет иметь только составляющую вдоль оси Oz. Поэтому рассеянное поле можно найти по компоненте A вдоль оси Oz. Тогда (9) можно записать в виде

$$E^{scat} = -\hat{a}_z j\omega A_z = -\hat{a}_z \frac{\omega\mu}{4} \int_l J_z(x') H_0^{(2)}(k|\rho - \rho'|) dx', \quad (10)$$

где \hat{a}_z – единичный вектор вдоль оси Oz. Заметим, что поле вне пластины, возбуждаемое плоской волной, будет равно сумме рассеянного и падающего полей, как

$$E_{out}^{scat} = E^{scat} + E^{inc} = -\frac{\omega\mu}{4} \int_l J_z(x') H_0^{(2)}(k|\rho - \rho'|) dx' + E^{inc}, \quad (11)$$

где k_0 – волновое число для среды вне пластины (здесь это свободное пространство). Поле внутри диэлектрика рассчитывается аналогично, но с обратными направлениями тока и без учета падающего поля [15] как

$$E_{in}^{scat} = -\frac{\omega\mu}{4} \int_l -J_z(x') H_0^{(2)}(k|\rho - \rho'|) dx', \quad (12)$$

где k – волновое число диэлектрической среды внутри пластины. Тангенциальные компоненты электрических полей должны быть непрерывными на поверхности структуры. Это можно обеспечить, применив следующее:

$$\hat{n} \times (E_{out}^{scat} - E_{in}^{scat}) = 0, \quad (13)$$

где \hat{n} – вектор нормали к поверхности структуры. Эти граничные условия позволяют определить электрические и магнитные токи на поверхности. (13) можно записать следующим образом:

$$E_{out}^{scat} = E_{in}^{scat}. \quad (14)$$

Из (14) в сочетании с (11) и (12) получаем:

$$\begin{aligned} E^{inc} &= \frac{\omega\mu}{4} \int_l J_z(x') H_0^{(2)}(k_0|\rho_m - \rho_n) dx' + \frac{\omega\mu}{4} \int_l J_z(x') H_0^{(2)}(k|\rho_m - \rho_n) dx' \\ &= \frac{\omega\mu}{4} \left\{ \int_l J_z(x') [H_0^{(2)}(k_0|\rho_m - \rho_n) + H_0^{(2)}(k|\rho_m - \rho_n)] dx' \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

что является ИУЭП, найденным с учетом (13). Тогда, согласно МоМ с СБФ, плотность тока может быть получена как

$$J(x) \approx \sum_{i=1}^N a_i f_i(x), \quad (16)$$

где $f_i(x)$ – ступенчатая функция в виде

$$f_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{если } x \in \text{сегменты СБФ} \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (17)$$

При заполнении матрицы Z, МоМ по своей природе учитывает влияние полей рассеяния между всеми сегментами (на любой сегмент воздействует не только падающая волна, но и рассеянное поле от других сегментов). Таким образом, ρ и ρ' в (15) становятся ρ_m и ρ_n (расстояния от начала координат до средних точек m -го и n -го сегментов соответственно). Тогда (15–17) можно объединить в виде

$$E^{inc} = \frac{\omega\mu}{4} \sum_{i=1}^N a_i \int_{cell} [H_0^{(2)}(k_0|\rho_m - \rho_n) + H_0^{(2)}(k|\rho_m - \rho_n)] dx'. \quad (18)$$

Видно, что уравнение (18) имеет вид

$$[V] = [Z][I], \quad (19)$$

где

$$Z_{mn} = \frac{\omega\mu}{4} \int_{cell} [H_0^{(2)}(k_0|\rho_m - \rho_n) + H_0^{(2)}(k|\rho_m - \rho_n)] dx', \quad (20)$$

и согласно [17]

$$V = \hat{a}_z E_0 e^{jk(x'\cos\varphi_{inc} + y'\sin\varphi_{inc})}, \quad (21)$$

где E_0 – амплитуда падающей плоской волны. В рассматриваемом примере $y'=0$, тогда (21) можно переписать в виде

$$V = \hat{a}_z E_0 e^{j k x' \cos \varphi_{inc}}. \quad (22)$$

Отсюда вполне можно решить уравнения (20) и (21) и найти плотность тока, но, как уже говорилось выше, программная реализация интегрального решения всегда является сложной и требующей больших вычислительных затрат задачей. В MATLAB можно использовать функции *integral* и *fun* для вычисления интегралов с использованием глобальной адаптивной квадратуры и допусков на ошибки по умолчанию [18]. Однако, как указано в цели данной работы, для вычисления элементов Z_{mn} используется приближенное интегральное решение, пригодное для простой реализации кода (не только в MATLAB). В этом подходе может быть использована аппроксимация функции Ханкеля по малому и большому аргументам [17]. В частности, если Δ очень мала по сравнению с λ , то (20) можно переписать в виде

$$Z_{mn} \approx \frac{\omega\mu}{4} \Delta [H_0^{(2)}(k_0|\rho_m - \rho_n) + H_0^{(2)}(k|\rho_m - \rho_n)]. \quad (23)$$

Если $m=n$ то $Z_{mn}=Z_{nn}=Z_{mm}$ это диагональные элементы матрицы импеданса. В этом случае (23) не может быть использовано, так как функция Ханкеля бесконечна. Однако можно использовать приближение функции Ханкеля по малому аргументу в виде

$$H_0^{(2)}(k\Delta) = 1 - j \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{\gamma k \Delta}{2}\right), \quad (24)$$

где $\gamma \approx \exp(0,5772) \approx 1,781$ (0,5772 – постоянная Эйлера). Тогда интеграл по сегменту может быть получен с учетом (24) как

$$\int_0^{\Delta} H_0^{(2)}(kR_m) dt \approx 2 \int_0^{\Delta} \left[1 - j \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{\gamma k x}{2}\right) \right] dx = \Delta - j \frac{2}{\pi} \Delta \left[\ln\left(\frac{\gamma k \Delta}{4}\right) - 1 \right], \quad (25)$$

а затем с учетом (25), получим (20) в виде

$$Z_{mn} = \frac{k\eta\Delta}{4} \left\{ 1 - j \frac{2}{\pi} \left[\ln\left(\frac{\gamma k_1 \Delta}{4}\right) - 1 \right] \right\} + \frac{k\eta\Delta}{4} \left\{ 1 - j \frac{2}{\pi} \left[\ln\left(\frac{\gamma k_2 \Delta}{4}\right) - 1 \right] \right\}. \quad (26)$$

После этого плотность поверхностного тока на тонкой диэлектрической пластине может быть определена по (19). Далее, поле рассеяния может быть рассчитано по (12), но с использованием приближения функции Ханкеля с большим аргументом, в виде

$$E^{scat} \approx -\hat{a}_z \eta \sqrt{\frac{j\beta}{8\pi}} \frac{e^{-j\beta\rho}}{\sqrt{\rho}} \int_l J_z(x') e^{j\beta x' \cos\varphi^{scat}} dx'. \quad (27)$$

Тогда эффективная площадь рассеяния (ЭПР) может быть рассчитана для этой двумерной задачи как

$$\sigma = \lim_{\rho \rightarrow \infty} 2\pi\rho |E^{scat}|^2 / |E^{inc}|^2. \quad (28)$$

III. АЛГОРИТМ

На основе представленной математической модели разработан алгоритм анализа тонкой диэлектрической пластины с помощью ТЭП и МоМ с СБФ.

1. Создание геометрической модели пластины:

- 1.1. Задание длины пластины и количества сегментов на ней.
- 1.2. Определение координат точек середины каждого сегмента.
- 1.3. Вычисление длины каждого сегмента.
2. Расчет элементов матрицы импеданса:
 - 2.1. Задание значений μ_0 , ϵ_0 и ϵ используемого диэлектрика, а также постоянной Эйлера.
 - 2.2. Задание частоты падающей волны и скорости света.
 - 2.3. Вычисление k_0 , k и ω .
 - 2.4. Вычисление элементов Z_{mn} по (23) и (26).

3. Расчет вектора возбуждения:

- 3.1. Задание E_0 и φ^{inc} .
- 3.2. Вычисление E^{inc} для каждого элемента вектора возбуждения по (22).
4. Расчет вектора тока:
 - 4.1. Вычисление инверсии матрицы $[Z]$.
 - 4.2. Вычисление элементов $[J]$ через матричное умножение $[Z^{-1}]$ на $[V]$ из (19).
5. Расчет рассеянного поля в дальней зоне:
 - 5.1. Задание значений φ^{scat} и ρ .
 - 5.2. Вычисление E^{scat} в сферической системе координат по (27).
 - 5.3. Расчет ЭПР (бистатической или моностатической) в сферической системе координат по (28).

IV. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В MATLAB разработан компьютерный код, основанный на алгоритме работы математической модели, сформированной в разделе III. Для проверки полученных с помощью этого кода результатов рассмотрены две структуры тонких диэлектрических пластин (их толщина приблизительно равна нулю) с различными размерами. Взяты различные диэлектрические материалы: арсенид галлия (GaAs) с $\epsilon=45-j31,68$ и титанат стронция (STO) с $\epsilon=9.97-j0,6$. Параметры структур и используемые падающие волны для их возбуждения приведены в табл. I:

ТАБЛИЦА I. ПАРАМЕТРЫ РАССМАТРИВАЕМЫХ СТРУКТУР

Структура	l , м	Количество сегментов	φ^{inc} , °	E_0 , В/м	f , МГц
S ₁	3	600	180	1	300
			90		
S ₂	2	400	0 +90	1	300

Сначала полученные модули плотности тока $|J|$ для S₁ при $\varphi^{inc}=180^\circ$ в разработанном коде сравнивались с модулями, рассчитанными в [15] (рис. 2). Видно, что результаты хорошо совпадают. Когда падающая волна возбуждает край пластины, видно, что $|J|$ велики в сегментах вблизи края.

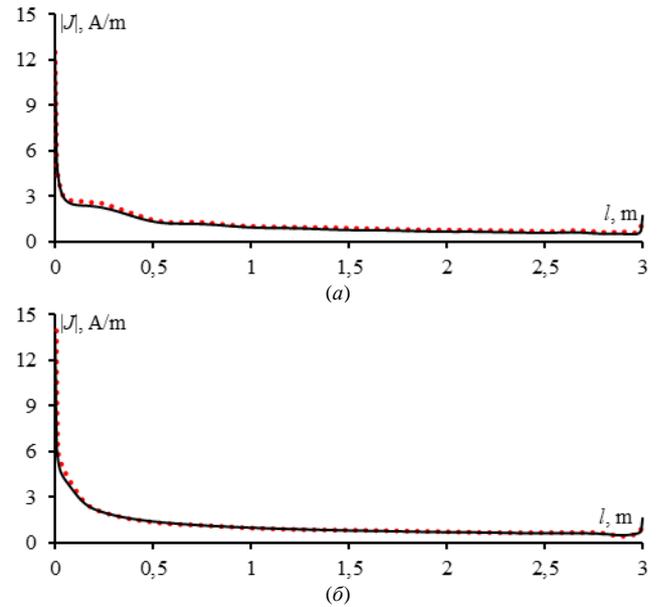


Рис. 2. $|J|$ для S₁, созданного из GaAs (а) и STO (б) при $\varphi^{inc}=180^\circ$, рассчитанный с помощью разработанного кода (—) и в [15] (---).

Далее полученные $|J|$ и $\arg(J)$ для S₁ при $\varphi^{inc}=90^\circ$ с помощью разработанного кода сравнивались с рассчитанными в [15] (рис. 3). Результаты хорошо совпадают, однако $\arg(J)$ немного отличается (максимальное отклонение около 2.1°). Это свидетельствует о том, что разработанный код работает корректно. Кроме того, установлено, что с ростом диэлектрической проницаемости значение элементов Z уменьшается, а следовательно, плотность тока возрастает. Например, рассчитанные $|J|$ на краях пластины составляют 0,0254 А/м для GaAs и 0,0275 А/м для STO.

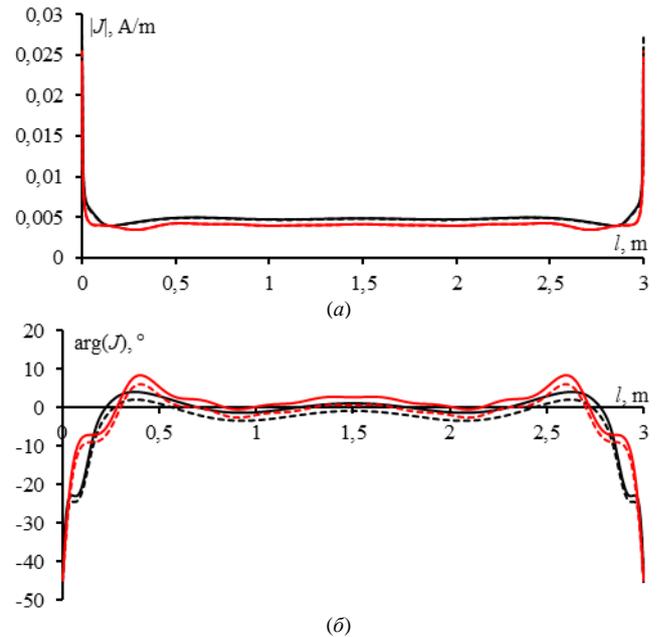


Рис. 3. $|J|$ (а) и $\arg(J)$ (б) для S₁, созданного из GaAs (красный) и STO (черный) при $\varphi^{inc}=90^\circ$, рассчитанные с помощью разработанного кода (---) и в [15] (—).

Наконец, результаты моностатического ЭПР для S_2 , полученные с помощью разработанного кода, сравнивались с рассчитанными в [15] (рис. 4). Рассмотрены три различных материала: STO, GaAs и идеальный электрический проводник (PEC). Результаты также хорошо совпадают (максимальное отклонение моностатических ЭПР около 0,5 дБ). Как уже упоминалось, с ростом диэлектрической проницаемости материала увеличивается плотность тока, что приводит к большему уровню рассеянного поля от структуры.

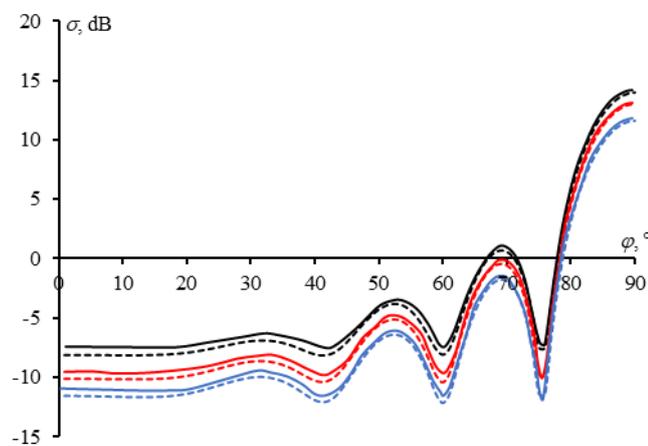


Рис. 4. Моностатические ЭПР для S_2 из PEC (черный), STO (красный), GaAs (синий) рассчитанные в разработанном коде (---) и в [15] (—).

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлен всесторонний анализ характеристик рассеяния от бесконечно длинных тонких диэлектрических пластин, возбуждаемых ТМ-поляризованными падающими волнами. Основным вкладом является разработка математической модели с использованием МоМ с СБФ и ТЭП с приближенным вычислением интегралов. Также подробно представлены математические формулы, что позволило легко разработать алгоритм и компьютерный код в MATLAB для моделирования различных тонких диэлектрических пластин. Результаты кода сравнены с численно рассчитанными в другой опубликованной работе. Хорошее согласие в расчетах рассеянного поля подтвердило точность разработанного кода. В дальнейшем созданные модель и код будут применены для анализа диэлектрических пластин, возбуждаемых ТЕ-поляризованными плоскими волнами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Yuan Y., Ji L., Wang Z., Yang D., Zhang B. и Wang H. Design of a high precision spaceborne millimeter wave SAR corner reflector // 2022 3rd China International SAR Symposium (CISS). Шанхай, Китай. 2022. С. 1–5, doi: 10.1109/CISS57580.2022.9971251.
- [2] Legenkiy M., Khrychov V. Numerical modeling of electromagnetic scattering from complex shape object with coating // Frequenz. 2022. №. 76, С. 75–82. doi: 10.1515/freq-2021-0062.
- [3] Wang B., Lin X. Q., Fan Y. L., Cai Y. и Liu J. L. Design of broadband wide-angle scatterer surface using artificial dielectric layers // in IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters. Октябрь. 2021. №. 20. С. 1913–1917. doi: 10.1109/LAWP.2021.3100508.

- [4] Kurosawa T. и Komakine T. Electric field measurement by using cylindrical dielectric scatterer // 2012 Proceedings of SICE Annual Conference (SICE). Акига, Япония. 2012. С. 407–411.
- [5] Wu Y. и Zhang L. Improving the efficiency of the discontinuous Galerkin volume integral equation method for electromagnetic scattering from inhomogeneous dielectric objects // 2023 IEEE International Workshop on Electromagnetics: Applications and Student Innovation Competition (iWEM). Харбин, Китай. 2023. С. 332–333. doi: 10.1109/iWEM58222.2023.10234869.
- [6] Shestopalov Y. и Smirnov Y. Numerical-analytical methods for the analysis of forward and inverse scattering by dielectric bodies in waveguides // 2012 19th International Conference on Microwaves, Radar & Wireless Communications. Варшава, Польша. 2012. С. 127–132. doi: 10.1109/MIKON.2012.6233493.
- [7] Yamagiwa T., Tomioka M., Kitahara R., Nakamura A., Kayano Y. и Kasuga T. A study on FDTD analysis method of differential lines including dielectric loss at GHz band // 2019 Joint International Symposium on Electromagnetic Compatibility, Sapporo and Asia-Pacific International Symposium on Electromagnetic Compatibility (EMC Sapporo/APEMC). Саппоро, Япония. 2019. С. 227–230. doi: 10.23919/EMCTokyo.2019.8893846.
- [8] Li Z.H., Huang Z.P., Samee A., Zheng X.L. и Li C. Mesoscopic FEM simulation of dielectric properties of composite material and experimental verification // 2009 IEEE 9th International Conference on the Properties and Applications of Dielectric Materials. Харбин, Китай. 2009. С. 1133–1136. doi: 10.1109/ICPADM.2009.5252313.
- [9] Richmond J. TE-wave scattering by a dielectric cylinder of arbitrary cross-section shape // in IEEE Transactions on Antennas and Propagation. Июль, 1966. №. 14. С. 460–464. doi: 10.1109/TAP.1966.1138730.
- [10] Bishop P.D. Investigating the possible sources of error using the method of moments to solve a dielectric scattering problem // Marquette University. 2013.
- [11] Ofuji Y., Koizumi D., Qiang Chen и Sawaya K. Method of moment for dielectric scatterers by using block modeling with Galerkin's method // IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium. Transmitting Waves of Progress to the Next Millennium. 2000 Digest. Held in conjunction with: USNC/URSI National Radio Science Meeting. США. 2000. №. 4. С. 2314–2317. doi: 10.1109/APS.2000.874957.
- [12] Lori F.S.H., Hosen M.S. и Okhmatovski V. Higher order method of moments solution of the new vector single-source surface integral equation for 2D TE scattering by dielectric objects // 2017 IEEE MTT-S International Conference on Numerical Electromagnetic and Multiphysics Modeling and Optimization for RF, Microwave, and Terahertz Applications (NEMO). Севилья. Испания. 2017. С. 161–163. doi: 10.1109/NEMO.2017.7964220.
- [13] Sheng W.T., Zhu Z.Y. and Tong M.S. On the method of moments solutions for volume integral equations with inhomogeneous dielectric media // in IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters. 2012. №. 11. С. 1154–1157. doi: 10.1109/LAWP.2012.2219573.
- [14] Nazari M., Moini R., Fortin S. и Dawalibi F.P. Wave scattering by thin dielectric and lossy materials using the MoM technique // 2020 IEEE International Symposium on Antennas and Propagation and North American Radio Science Meeting, Montreal, QC. Канада. 2020. С. 1075–1076, doi: 10.1109/IEECONF35879.2020.9330332.
- [15] Abbas H.T., Aljihmani L.N., Nevels R.D. и Qaraqe K.A. Electromagnetic scattering of two-dimensional electronic systems // in IEEE Access. 2019. №. 7. С. 106521–106526. doi: 10.1109/ACCESS.2019.2932506.
- [16] Harrington R. F. Matrix methods for field problems // in Proceedings of the IEEE. Feb. 1967. №. 55. С. 136–149. doi: 10.1109/PROC.1967.5433.
- [17] Balanis C.A. Advanced engineering electromagnetics // John Wiley & Sons. 2012.
- [18] MathWorks. Help Center. URL: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/integral.html> (Дата обращения: 20.05.2024).